

APOSTILA DE LÓGICA

Conceitos iniciais

O conceito mais elementar no estudo da lógica é o de **Proposição**. Proposição “vem de propor” que significa submeter à apreciação; requerer um juízo. Trata-se de uma **sentença declarativa** – algo que será declarado por meio de termos, palavras ou símbolos – e cujo conteúdo poderá ser considerado **verdadeiro** ou **falso**.

Então, se eu afirmar “*a Terra é maior que a Lua*”, estarei diante de uma **proposição** cujo **valor lógico** é verdadeiro.

Fica claro que quando falarmos em **valor lógico** estaremos nos referindo a um dos dois possíveis juízos que atribuiremos a uma proposição: **verdadeiro (V)** ou **falso (F)**.

E se alguém disser: “*Feliz ano novo!*”, será que isso é uma proposição verdadeira ou falsa? Nenhuma, pois não se trata de uma sentença para a qual se possa atribuir um valor lógico.

Concluimos, pois, que...

- **Sentenças exclamativas:** “*Caramba!*”; “*Feliz aniversário!*”
- **Sentenças interrogativas:** “*como é o seu nome?*”; “*o jogo foi de quanto?*”
- **Sentenças imperativas:** “*Estude mais.*”; “*Leia aquele livro.*”

... não serão estudadas. Somente aquelas primeiras – **sentenças declarativas** – que podem ser imediatamente reconhecidas como verdadeiras ou falsas.

Normalmente, as proposições são representadas por letras minúsculas (p, q, r, s, etc). São outros exemplos de **proposições**:

p: Pedro é médico.

q: $5 > 8$

r: Luíza foi ao cinema ontem à noite.

Na linguagem do raciocínio lógico, ao afirmarmos que é **verdade** que *Pedro é médico* (proposição **p** acima), representaremos isso apenas com: **VL(p)=V**, ou seja, o **valor lógico de p é verdadeiro**. No caso da proposição **q**, que é falsa, diremos **VL(q)=F**. Haverá alguma proposição que possa, ao mesmo tempo, ser verdadeira e falsa? Não! Jamais! E por que não? Porque o Raciocínio Lógico, como um todo, está sedimentado sobre alguns **princípios**, muito fáceis de entender, e que terão que ser sempre obedecidos. São os seguintes:

- *Uma proposição verdadeira é verdadeira; uma proposição falsa é falsa. (Princípio da identidade);*
- *Nenhuma proposição poderá ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. (Princípio da Não-Contradição);*
- *Uma proposição ou será verdadeira, ou será falsa: não há outra possibilidade. (Princípio do Terceiro Excluído).*

Proposições podem ser ditas *simples* ou *compostas*. Serão *proposições simples* aquelas que vêm sozinhas, desacompanhadas de outras proposições. Nada mais fácil de ser entendido. Exemplos:

- *Todo homem é mortal.*
- *O novo papa é argentino.*

Todavia, se duas (ou mais) proposições vêm *conectadas* entre si, formando uma só sentença, estaremos diante de uma *proposição composta*. Exemplos:

- *João é médico e Pedro é dentista.*
- *Maria vai ao cinema ou Paulo vai ao circo.*
- **Ou** *Luís é baiano, ou é paulista.*
- **Se** *chover amanhã de manhã, então não irei à praia.*
- *Comprarei uma mansão se e somente se eu ganhar na loteria.*

Nas sentenças acima, vimos em destaque os vários tipos de conectivos – ditos **conectivos lógicos** – que poderão estar presentes em uma proposição composta. **Conectivos Lógicos** são expressões que servem para unir duas ou mais proposições. Estudaremos cada um deles a seguir, uma vez que é de nosso interesse conhecer o **valor lógico** das *proposições compostas*.

Veremos que, para determinarmos se uma *proposição composta* é verdadeira ou falsa, dependeremos de duas coisas: 1ª) do valor lógico das proposições componentes; e 2ª) do tipo de conectivo que as une.

Conectivo “e”: (conjunção)

Proposições compostas em que está presente o conectivo “e” são ditas **CONJUNÇÕES**. Simbolicamente, esse conectivo pode ser representado por “ \wedge ”. Então, se temos a sentença:

- “*Marcos é médico e Maria é estudante*”
... poderemos representá-la apenas por: **$p \wedge q$** . onde: p = *Marcos é médico* e q = *Maria é estudante*.

Como se revela o **valor lógico** de uma *proposição conjuntiva*? Da seguinte forma: **uma conjunção só será verdadeira, se ambas as proposições componentes forem também verdadeiras.**

Então, diante da sentença “*Marcos é médico e Maria é estudante*”, só poderemos concluir que esta proposição composta é **verdadeira** se for verdade, ao mesmo tempo, que *Marcos é médico* e que *Maria é estudante*.

Pensando pelo caminho inverso, teremos que **basta que uma das proposições componentes seja falsa, e a conjunção será – toda ela – falsa. Obviamente que o resultado falso também ocorrerá quando ambas as proposições componentes forem falsas.**

Essas conclusões podem ser resumidas em uma pequena tabela. Trata-se da **tabela-verdade**, de fácil construção e de fácil entendimento.

Retomemos as nossas premissas:

p = *Marcos é médico* e **q** = *Maria é estudante*.

Se tivermos que ambas são verdadeiras, a conjunção formada por elas (*Marcos é médico e Maria é estudante*) será também verdadeira. Teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	q	p ∧ q
V	V	V

Se for verdade apenas que *Marcos é médico*, mas falso que *Maria é estudante*, teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	q	p ∧ q
V	F	F

Por outro lado, se for verdadeiro que *Maria é estudante*, e falso que *Marcos é médico*, teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	q	p ∧ q
F	V	F

Enfim, se ambas as sentenças simples forem falsas, teremos que:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	q	p ∧ q
F	F	F

Ora, as quatro situações acima esgotam todas as possibilidades para uma conjunção. Fora disso não há outras! Criamos, portanto, a **tabela-verdade** que representa uma **conjunção**, ou seja, a tabela-verdade para uma proposição composta com a presença do conectivo “e”. Teremos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

É preciso que a informação constante da terceira coluna (em destaque) fique guardada em nossa memória: **uma conjunção só será verdadeira, quando ambas as partes que a compõem também forem verdadeiras. E falsa nos demais casos.**

Uma maneira de assimilar bem essa informação seria pensarmos nas sentenças simples como promessas de um pai a um filho: “*eu te darei uma bola E te darei uma bicicleta*”. Ora, pergunte a qualquer criança! Ela vai entender que a promessa é para os dois presentes. Caso o pai não dê nenhum presente, ou dê apenas um deles, a promessa não terá sido cumprida. Terá sido falsa! No entanto, a promessa será verdadeira se as duas partes forem também verdadeiras!

Na hora de formar uma *tabela-verdade* para **duas** proposições componentes (**p** e **q**), saberemos, de antemão, que essa tabela terá quatro linhas. Começaremos, então, fazendo a seguinte estrutura:

p	q

Daí, a coluna da primeira proposição terá sempre a seguinte disposição: dois (V) “vês” seguidos de dois (F) “efes”. Assim:

p	q
V	
V	
F	
F	

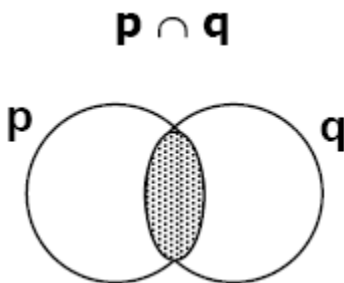
Enquanto a variação das letras (V e F) para a premissa **p** ocorre de duas em duas linhas, para a premissa **q** é diferente: “vês” (V) e “efes” (F) se alternando a cada linha, começando com um V. Assim:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Essa estrutura inicial é **sempre assim**, para tabelas-verdade de duas proposições **p** e **q**. A terceira coluna dependerá do **conectivo** que as une, e que está sendo analisado. No caso do conectivo “e”, ou seja, no caso da **conjunção**, já aprendemos a completar a nossa tabela verdade:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a conjunção “**p e q**” corresponderá à **interseção** do conjunto **p** com o conjunto **q**. Teremos:



Conectivo “ou”: (disjunção)

Recebe o nome de **DISJUNÇÃO** toda proposição composta em que as partes estejam unidas pelo conectivo **ou**. Simbolicamente, representaremos esse conectivo por “ \vee ”. Portanto, se temos a sentença:

- “Marcos é médico **ou** Maria é estudante”

... então a representaremos por: $p \vee q$.

Seremos capazes de criar uma *tabela-verdade* para uma *proposição disjuntiva*? Claro! Basta nos lembrarmos da tal promessa do pai para seu filho! Vejamos: “**eu te darei uma bola OU te darei uma bicicleta**”. Neste caso, a criança já sabe, de antemão, que a promessa é por apenas um dos presentes! Bola **ou** bicicleta! ganhando de presente apenas um deles, a promessa do pai *já valeu!* Já foi verdadeira! E se o pai for *abastado* e resolver dar os dois presentes? Pense na cara do menino! Feliz ou triste? Felicíssimo! A promessa foi mais do que cumprida. Só haverá um caso, todavia, em que a bendita promessa não se cumprirá: se o pai esquecer o presente, e não der nem a bola e nem a bicicleta. Terá sido falsa toda a *disjunção*.

Daí, concluímos: **uma disjunção será falsa quando as duas partes que a compõem forem ambas falsas! E nos demais casos, a disjunção será verdadeira!** Teremos as possíveis situações:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	q	$p \vee q$
v	v	v

Ou:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	q	$p \vee q$
v	f	v

Ou:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	q	$p \vee q$
f	v	v

Ou, finalmente:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	q	p V q
F	F	F

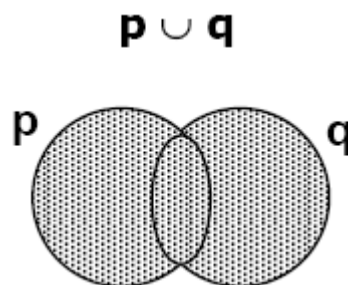
Juntando tudo, teremos:

p	q	pVq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A promessa inteira só é falsa se as duas partes forem descumpridas!

Observem que as duas primeiras colunas da tabela-verdade acima – as colunas do **p** e do **q** – são exatamente iguais às da tabela-verdade da *conjunção* (**p E q**). Muda apenas a terceira coluna, que agora representa um “**ou**”, a disjunção.

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos por meio de um diagrama, a disjunção “**p ou q**” corresponderá à **união** do conjunto **p** com o conjunto **q**,



Conectivo “Ou ... ou ...”: (disjunção exclusiva)

Há um terceiro tipo de proposição composta, bem parecido com a disjunção que acabamos de ver, mas com uma pequena diferença. Comparemos as duas sentenças abaixo:

“Te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta”
“**OU** te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta”

A diferença é sutil, mas importante. Reparemos que na primeira sentença vê-se facilmente que se a primeira parte for *verdade* (*te darei uma bola*), isso não impedirá que a segunda parte (*te darei uma bicicleta*) também o seja. Já na segunda proposição, se for verdade que “*te darei uma bola*”, então teremos que não será dada a bicicleta. E vice-versa, ou seja, se for verdade que “*te darei uma bicicleta*”, então teremos que não será dada a bola.

Em outras palavras, a segunda estrutura apresenta duas **situações mutuamente excludentes**, de sorte que apenas uma delas pode ser verdadeira, e a restante será necessariamente falsa. Ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, verdadeiras; ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, falsas.

Na segunda sentença acima, este tipo de construção é uma **DISJUNÇÃO EXCLUSIVA**, pela presença dos dois conectivos “ou”, que determina que **uma sentença é necessariamente verdadeira, e a outra, necessariamente falsa**.

E como fica a sua tabela-verdade? Ora, uma *disjunção exclusiva* só será verdadeira se obedecer à mútua exclusão das sentenças. Falando mais fácil: **só será verdadeira se houver uma das sentenças verdadeira e a outra falsa. Nos demais casos, a disjunção exclusiva será falsa**.

O símbolo que designa a *disjunção exclusiva* é o “**V**”. E a tabela-verdade será, pois, a seguinte:

p	q	p V q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivo “Se ... então ...”: (condicional)

Estamos agora falando de proposições como as que se seguem:

- *Se Pedro é médico, então Maria é dentista.*
- *Se amanhecer chovendo, então não irei à praia.*

Muita gente tem dificuldade em entender o funcionamento desse tipo de proposição. Convém, para facilitar nosso entendimento, que trabalheemos com a seguinte sentença.

- ***Se nasci em Fortaleza, então sou cearense.***

Cada um de vocês pode adaptar essa frase acima à sua realidade: troque *Fortaleza* pelo nome da sua cidade natal, e troque *cearense* pelo nome que se dá a quem nasce no seu Estado. Por exemplo:

- *Se nasci em Apodi, então sou potiguar.*
- *Se nasci em Russas, então sou cearense.*

E assim por diante. Pronto?

Agora me responda: qual é a única maneira dessa proposição estar incorreta? Ora, só há um jeito desta frase ser falsa: se a primeira parte for verdadeira, e a segunda for falsa. Ou seja, se é verdade que eu *nasci em Apodi*, então necessariamente é verdade que *eu sou potiguar*. Se alguém disser que é verdadeiro que *eu nasci em Apodi*, e que é falso que *eu sou potiguar*, então este conjunto estará todo falso.

É importante salientar que o exemplo trabalhado acima (*Se nasci em Russas então sou cearense*) foi escolhido exclusivamente para fins didáticos. Na realidade, não é preciso que exista qualquer conexão de sentido entre o conteúdo das proposições componentes da condicional. Por exemplo, poderíamos ter a seguinte sentença:

“Se a baleia é um mamífero então o papa é alemão”

O que interessa é apenas uma coisa: a primeira parte da condicional é uma **condição suficiente** para obtenção de um resultado necessário.

Percebam, pois, que se alguém disser que: “*Pedro ser rico é condição suficiente para Maria ser médica*”, então nós podemos reescrever essa sentença, usando o *formato* da condicional. Teremos:

- “*Pedro ser rico é condição suficiente para Maria ser médica*” é igual a:
- “*Se Pedro for rico, então Maria é médica*”

Por outro lado, se ocorrer de alguém dizer que: “*Maria ser médica é condição necessária para que Pedro seja rico*”, também poderemos traduzir isso de outra forma:

- “*Maria ser médica é condição necessária para que Pedro seja rico*” é igual a:
- “*Se Pedro for rico, então Maria é médica*”

Não podemos, pois esquecer disso:

- ***Uma condição suficiente gera um resultado necessário.***

Pois bem! Como ficará nossa tabela-verdade, no caso da *proposição condicional*? Pensaremos aqui pela via de exceção: **só será falsa esta estrutura quando houver a condição suficiente, mas o resultado necessário não se confirmar. Ou seja, quando a primeira parte for verdadeira, e a segunda for falsa. Nos demais casos, a condicional será verdadeira.**

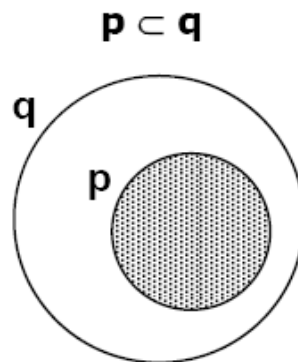
A sentença condicional “*Se p, então q*” será representada por uma seta: $p \rightarrow q$.

Na proposição “*Se p, então q*”, a proposição **p** é denominada de *antecedente*, enquanto a proposição **q** é dita *conseqüente*. Teremos:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a

proposição condicional “**Se p então q**” corresponderá à **inclusão** do conjunto **p** no conjunto **q** (p está contido em q):



Conectivo “... se e somente se ...”: (bicondicional)

A estrutura dita *bicondicional* apresenta o conectivo “*se e somente se*”, separando as duas sentenças simples. Trata-se de uma proposição de fácil entendimento. Se alguém disser:

*“Eduardo fica alegre **se e somente se** Mariana sorri”.*

É o mesmo que fazer a conjunção entre as duas proposições condicionais:

- “Eduardo fica alegre **somente se** Mariana sorri **e** Mariana sorri **somente se** Eduardo fica alegre”.

Ou ainda, dito de outra forma:

- “Se Eduardo fica alegre, então Mariana sorri **e** se Mariana sorri, então Eduardo fica alegre”.

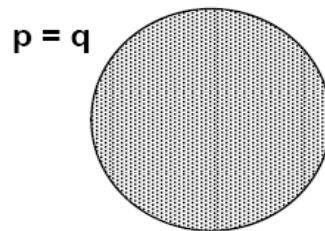
São construções de mesmo sentido!

A *bicondicional* é uma **conjunção** entre duas *condicionais*. Haverá duas situações em que a *bicondicional* será verdadeira: quando antecedente e conseqüente forem ambos verdadeiros, ou quando forem ambos falsos. Nos demais casos, a *bicondicional* será falsa.

Sabendo que a frase “**p se e somente se q**” é representada por “**p↔q**”, então nossa tabela-verdade será a seguinte:

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a proposição bicondicional “**p se e somente se q**” corresponderá à **igualdade** dos conjuntos **p** e **q**.



Observação: Uma proposição bicondicional “**p se e somente se q**” equivale à proposição composta: “**se p então q e se q então p**”, ou seja,

“**p ↔ q**” é a mesma coisa que “**(p → q) e (q → p)**”

Partícula “ não ”: (negação)

Veremos algo de suma importância: **como negar uma proposição**.

No caso de uma proposição simples, não poderia ser mais fácil: basta pôr a palavra **não** antes da sentença, e já a tornamos uma negativa. Exemplos:

- *João é médico. Negativa: João **não** é médico.*
- *Maria é estudante. Negativa: Maria **não** é estudante.*

Reparemos que caso a sentença original já seja uma negativa (já traga a palavra *não*), então para negar a negativa, teremos que excluir a palavra *não*. Assim:

- *João **não** é médico. Negativa: João é médico.*
- *Maria **não** é estudante. Negativa: Maria é estudante.*

Pronto! Em se tratando de fazer a *negação* de proposições simples, já estamos *craques!*

O símbolo que representa a negação é uma pequena *cantoneira* (\neg) ou um sinal de til (\sim), antecedendo a frase. (**Adotaremos o til**).

A tabela-verdade da *negação* é mais simplificada que as demais já vistas. Teremos:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Podem-se empregar, também, como equivalentes de "**não A**", as seguintes expressões:

- ***Não é verdade que A.***
- ***É falso que A.***

Daí as seguintes frases são equivalentes:

- Lógica **não** é fácil.
- **Não é verdade que** lógica é fácil.
- **É falso que** lógica é fácil.

Negação de um proposição composta

Já sabemos negar uma proposição simples. Mas, e se for uma *proposição composta*, como fica? Aí, dependerá de qual é a estrutura em que se encontra essa *proposição*. Veremos, pois, uma a uma:

→ Negação de uma proposição conjuntiva: $\sim(p \text{ e } q)$

Para negar uma proposição no formato de conjunção ($p \text{ e } q$), faremos o seguinte:

1. Negaremos a primeira parte ($\sim p$);
2. Negaremos a segunda parte ($\sim q$);
3. Trocaremos e por ou.

E só!

Daí, a questão dirá: “*Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista*”, e pedirá que encontremos, entre as opções de resposta, aquela frase que seja *logicamente equivalente* a esta fornecida.

Analisemos: o começo da sentença é “*não é verdade que...*”. Ora, dizer que “*não é verdade que...*” é nada mais nada menos que negar o que vem em seguida. E o que vem em seguida? Uma estrutura de conjunção!

Daí, como negaremos que “*João é médico e Pedro é dentista*”? Da forma explicada acima:

1. Nega-se a primeira parte ($\sim p$) = João não é médico;
2. Nega-se a segunda parte ($\sim q$) = Pedro não é dentista;
3. Troca-se E por OU, e o resultado final será o seguinte:

JOÃO NÃO É MÉDICO OU PEDRO NÃO É DENTISTA.

Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Como fomos chegar à essa conclusão? Ora, por meio da comparação entre as tabelas-verdade das duas proposições acima. Vejamos como foi isso. Primeiro, trabalhem a tabela-verdade do $\sim(p \wedge q)$.

Tudo começa com aquele formato básico, que já é nosso conhecido:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Daí, faremos a próxima coluna, que é a da conjunção (**e**). Teremos:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por fim, construiremos a coluna que é a negativa desta terceira. Ora, já sabemos que com a negativa, o que é verdadeiro vira falso, e o que é falso vira verdadeiro. Logo, teremos:

p	q	p ∧ q	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Guardemos, pois, essa última coluna (em destaque). Ela representa o *resultado lógico* da estrutura $\sim(p \wedge q)$. Agora, construamos a tabela-verdade da estrutura $\sim p \vee \sim q$, e comparemos os resultados. No início, teremos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Faremos agora as duas colunas das duas negativas, de **p** e de **q**. Para isso, conforme já sabemos, quem for **V** virará **F**, e vice-versa. Teremos:

p	q	~p	~q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Agora, passemos à coluna final: **~p v ~q**. Aqui nos lembraremos de como funciona uma *disjunção*. A *disjunção* é a estrutura do **ou**. Para ser verdadeira basta que uma das sentenças também o seja. Daí, teremos:

p	q	~p	~q	~p V ~q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Finalmente, comparemos a *coluna resultado* (em destaque) desta estrutura (**~p v ~q**) com aquela que estava *guardada* da estrutura **~(p ∧ q)**. Teremos:

~(p ∧ q)	~p V ~q
F	F
V	V
V	V
V	V

Resultados idênticos! Daí, do *ponto de vista lógico*, para negar **p e q**, negaremos **p**, negaremos **q**, e trocaremos **e** por **ou**.

Já sabendo disso, não perderemos tempo na prova construindo tabela-verdade para saber como se faz a negativa de uma *conjunção*! Esse exercício que fizemos acima, de comparar as *colunas-resultado* das duas tabelas, serviu apenas para explicar a origem dessa equivalência lógica. **Ou seja, para dizer se uma proposição é, do ponto de vista lógico, equivalente a outra, basta fazer uma comparação entre suas tabelas-verdade.**

→ Negação de uma proposição disjuntiva: $\sim(p \text{ ou } q)$

Para negar uma proposição no formato de disjunção (**p ou q**), faremos o seguinte:

1. Negaremos a primeira parte ($\sim p$);
2. Negaremos a segunda parte ($\sim q$);
3. Trocaremos OU por E.

E só!

Se uma questão de prova disser: “Marque a assertiva que é logicamente equivalente à seguinte frase: *Não é verdade que Pedro é dentista ou Paulo é engenheiro*”.

Pensemos: a frase começa com um “*não é verdade que...*”, ou seja, o que se segue está sendo negado! E o que se segue é uma estrutura em forma de *disjunção*. Daí, obedecendo aos passos descritos acima, faremos:

1. Nega-se a primeira parte ($\sim p$) = Pedro não é dentista;
2. Nega-se a segunda parte ($\sim q$) = Paulo não é engenheiro;
3. Troca-se OU por E, e o resultado final será o seguinte:

PEDRO NÃO É DENTISTA E PAULO NÃO É ENGENHEIRO.

Na linguagem apropriada, concluímos que:

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Se formos curiosos, poderemos fazer a comprovação – via tabelas-verdade – desta conclusão acima. Somos curiosos? Claro! Tomemos a primeira parte: $\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$. Teremos, de início:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Daí, construindo a coluna da disjunção (**p ou q**). Teremos:

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Finalizando, fazendo a negação da coluna da disjunção, teremos:

p	q	p V q	$\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Guardemos essa *coluna resultado* para o final. E passemos à segunda parte da análise: a estrutura $\sim\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{q}$. Teremos, a princípio, o seguinte:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo-se as colunas de negações de **p** e **q**, teremos:

p	q	~p	~q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Finalizando, fazendo a conjunção $\sim p$ e $\sim q$, teremos os seguintes resultados:

p	q	~p	~q	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concluindo, comparemos a *coluna resultado* (em destaque) desta estrutura $(\sim p \wedge \sim q)$ com aquela que estava *guardada* da estrutura $\sim(p \vee q)$. Teremos:

$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
F	F
F	F
F	F
V	V

Resultados idênticos! Daí, do *ponto de vista lógico*, para negar “**p ou q**”, negaremos **p**, negaremos **q**, e trocaremos **ou** por **e**.

→ Negação de uma proposição condicional: $\sim(p \rightarrow q)$

Como é que se nega uma condicional? Da seguinte forma:

1º) Mantém-se a primeira parte; e

2º) Nega-se a segunda parte.

Por exemplo, como seria a negativa de “Se chover, então levarei o guarda-chuva”?

1º) Mantendo a primeira parte: “Chove” E

2º) Negando a segunda parte: “eu não levo o guarda-chuva”.

Resultado final: “Chove e eu não levo o guarda-chuva”.

Na linguagem apropriada, concluímos que:

$$\sim(p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

Na sequência, apresento duas tabelas que trazem um resumo das relações vistas até o momento. Vejamos:

<i>Estrutura Lógica</i>	<i>É verdade quando</i>	<i>É falso quando</i>
$p \wedge q$	p e q são, ambos, verdade	um dos dois for falso
$p \vee q$	um dos dois for verdade	p e q, ambos, são falsos
$p \rightarrow q$	Nos demais casos	p é verdade e q é falso
$p \leftrightarrow q$	p e q tiverem valores lógicos iguais	p e q tiverem valores lógicos diferentes
$\sim p$	p é falso	p é verdade

Negativa das proposições compostas:

Negativa de (p e q)	$\sim p$ ou $\sim q$
Negativa de (p ou q)	$\sim p$ e $\sim q$
Negativa de (p \rightarrow q)	p e $\sim q$
Negativa de (p \leftrightarrow q)	[(p e $\sim q$) ou (q e $\sim p$)]

Tabelas-verdade

Trataremos agora um pouco mais a respeito de **TABELA-VERDADE**. Trata-se de uma tabela mediante a qual são analisados os valores lógicos de proposições compostas.

Já vimos que uma *Tabela-Verdade* que contém **duas** proposições apresentará exatamente um número de **quatro** linhas! Mas e se estivermos analisando uma proposição composta com três ou mais proposições componentes? Como ficaria a tabela-verdade neste caso? Generalizando para qualquer caso, teremos que o número de linhas de uma tabela-verdade será dado por:

$$\mathbf{N^{\circ} \text{ linhas da Tabela-Verdade} = 2^{n^{\circ} \text{ de proposi\c{c}oes}}$$

Ou seja, se estivermos trabalhando com duas proposições **p** e **q**, então a tabela-verdade terá 4 linhas. Se estivermos trabalhando com uma proposição composta que tenha **três** componentes **p, q e r**, a tabela-verdade terá $2^3 = 8$. E assim, por diante.

→ Tabelas-verdade para p e q:

Trabalhando com duas proposições componentes, a estrutura inicial da tabela-verdade será sempre aquela que já aprendemos. Qual seja:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E a próxima coluna (ou próximas colunas) da tabela-verdade dependerá dos conectivos que estarão presentes na proposição composta.

Já sabemos construir, pelo menos, cinco tabelas-verdade de proposições compostas! A tabela-verdade da **conjunção**, da **disjunção**, da **disjunção exclusiva**, da **condicional** e da **bicondicional**. Com este conhecimento prévio, já estamos aptos a construir as tabelas-verdade de qualquer outra proposição formada por duas proposições componentes (**p** e **q**). Designaremos tal proposição composta da seguinte forma: **P(p, q)**.

Suponhamos, pois, que estamos diante da seguinte proposição composta: $P(p, q) = \sim(p \vee \sim q)$ e desejamos construir a sua tabela-verdade. Como seria? O início da tabela é, conforme sabemos, sempre o mesmo. Teremos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Agora olhemos para a proposição que estamos trabalhando [$\sim(p \vee \sim q)$] e comparemos o que já temos na tabela acima com o que ainda precisamos encontrar. Já temos o $\sim q$? Ainda não! Então, é nosso próximo passo: construir a coluna da **negação de q**. Teremos:

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Seguindo adiante, construiremos agora a coluna referente ao parênteses $(p \vee \sim q)$. Trata-se pois, de uma *disjunção*, cujo funcionamento já é nosso conhecido (só será falsa se as duas partes forem falsas!). Colocaremos em destaque (sombreado) as colunas de nosso interesse para a formação desta *disjunção*. Teremos:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Por fim, concluindo a análise desta proposição composta, resta-nos construir a coluna que é a própria proposição: $\sim(p \vee \sim q)$. Ou seja, faremos a **negação** da *disjunção* acima. Para isso, quem for VERDADEIRO vira FALSO e vice-versa. Teremos:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

É este, portanto, o resultado final da *tabela-verdade* para a proposição $\sim(p \vee \sim q)$. Uma coisa muito importante que deve ser dita neste momento é que, na hora de construirmos a *tabela-verdade* de uma proposição composta qualquer, teremos que seguir uma certa **ordem de precedência** dos conectivos. Ou seja, os nossos passos terão que obedecer a uma seqüência. Começaremos sempre trabalhando com o que houver **dentro dos parênteses**. Só depois, passaremos ao que houver fora deles. Em ambos os casos, sempre obedecendo à seguinte ordem:

1. Faremos as negações (\sim);
2. Faremos as conjunções ou disjunções, na ordem em que aparecerem;
3. Faremos a condicional;
4. Faremos o bicondicional.

Para fixar nossos conhecimentos vamos construir a tabela-verdade da seguinte proposição composta: $P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

SOLUÇÃO: Observamos que há dois parênteses. Começaremos, pois, a trabalhar o primeiro deles, isoladamente. Obedeceremos à *ordem de precedência* dos conectivos:

1º passo: Negação de q

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

2º passo: Conjunção

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F

V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

3º passo: Negação de p

p	q	~p
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4º passo: Conjunção

p	q	~p	$q \wedge \sim p$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

5º passo: uma vez trabalhados os dois parênteses, faremos a disjunção que os une.

$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
F	F	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se quiséssemos, poderíamos ter feito tudo em uma única tabela maior, da seguinte forma:

p	q	~q	$p \wedge \sim q$	~p	$q \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F

Pronto! Concluímos mais um problema. Já estamos craques em construir tabelas-verdade para proposições de duas sentenças. Mas, e se estivermos trabalhando com três proposições

simples (**p**, **q** e **r**)? Como é que se faz essa tabela-verdade? A primeira coisa é definir o número de linhas que esta tabela-verdade terá. Conforme já aprendemos, este cálculo será dado por **Nº linhas = 2^{Nº de proposições}**. Logo, haverá oito linhas (**2³=8**) numa **tabela-verdade** para três proposições simples. Para duas proposições, a tabela-verdade se inicia sempre do mesmo jeito. O mesmo ocorrerá para uma tabela-verdade de três proposições. Terá sempre o mesmo *início*. E será o seguinte:

p	q	r

A coluna da proposição **p** será construída da seguinte forma: quatro **V** alternando com quatro **F**; a coluna da proposição **q** tem outra alternância: dois **V** com dois **F**; por fim, a coluna da proposição **r** alternará sempre um **V** com um **F**. Teremos, portanto, sempre a mesma estrutura inicial:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Saber construir esta tabela acima é **obrigação**. Ela corresponde à estrutura inicial de uma tabela-verdade para três proposições simples.

Suponhamos que uma questão de prova peça que construamos a tabela-verdade da proposição composta seguinte: $P(p,q,r)=(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee \sim r)$. A leitura dessa proposição é a seguinte: *Se p e não q, então q ou não r.*

Vamos fazer esse exercício? Começaremos sempre com a estrutura inicial para três proposições. Teremos:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Daí, já sabemos que existe uma *ordem de precedência* a ser observada, de modo que trabalharemos logo os parênteses da proposição acima. Começando pelo primeiro deles, faremos os seguintes passos:

1º passo: Negação de q

p	q	r	~q
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

2º passo: Conjunção do primeiro parênteses

p	q	r	~q	p ∧ ~q
V	V	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V

V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

3º passo: Negação de r

p	q	r	~q	$p \wedge \sim q$	r
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V

4º passo: Disjunção do segundo parênteses

p	q	r	~q	$p \wedge \sim q$	~r	$q \vee \sim r$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

5º passo: Finalmente, vamos fazer a condicional.

RECORDANDO: a condicional só será falsa se tivermos VERDADEIRO na primeira parte e FALSO na segunda!!!

p	q	r	~q	$p \wedge \sim q$	~r	$q \vee \sim r$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee \sim r)$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F

V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	V

Pronto! Mais uma etapa concluída. Estamos aptos a construir tabelas-verdade para proposições compostas de duas ou três proposições componentes.

Chegou o momento de passarmos a conhecer três outros conceitos: **Tautologia**, **Contradição** e **Contingência**.

→ Tautologia

Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições **p, q, r, ...** será dita uma **Tautologia** se ela for **sempre verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das proposições **p, q, r, ...** que a compõem. Em palavras mais simples: para saber se uma proposição composta é uma *Tautologia*, construiremos a sua tabela-verdade! Daí, **se a última coluna da tabela-verdade só apresentar verdadeiro (e nenhum falso), então estaremos diante de uma Tautologia**. Só isso!

Exemplo: A proposição $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos de **p** e de **q**, como se pode observar na tabela-verdade.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Observe que o valor lógico da proposição composta $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$, que aparece na última coluna, é sempre **verdadeiro**. Passemos a outro exemplo de Tautologia: $[(p \vee q) \wedge (p \wedge s)] \rightarrow p$. Construa a tabela-verdade e demonstre que se trata de uma *tautologia*.

→ Contradição

Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições **p, q, r, ...** será dita uma **contradição** se ela for **sempre falsa**, independentemente dos valores lógicos das proposições **p, q, r ...** que a compõem. Ou seja, **construindo a tabela-verdade de uma proposição composta, se todos os resultados da última coluna forem FALSOS, então estaremos diante de uma contradição.**

Exemplo: A proposição “ $p \leftrightarrow \sim p$ ” é uma contradição, pois sempre é falsa independentemente do valor lógico de **p**, como é possível observar na tabela-verdade abaixo:

p	~p	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	F

→ Contingência

Uma proposição composta será dita uma **contingência** sempre que não for uma *tautologia* ou uma *contradição*. Somente isso! Você pegará a proposição composta e construirá a sua *tabela-verdade*. Se você verificar que aquela proposição nem é uma *tautologia* (só resultados **V**), e nem é uma *contradição* (só resultados **F**), então, pela via de exceção, será dita uma *contingência*!

Exemplo: A proposição “ $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ ” é uma contingência. Por que essa proposição é uma contingência? Porque nem é uma tautologia e nem é uma contradição. Só por isso! Vejamos sua tabela-verdade a seguir.

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V